Aula 28

Séries de Fourier

Definição: Dada uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ designa-se por **série de Fourier de** f a série trigonométrica

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n \geq 1$$

Teorema (Fourier/Dirichlet): Dada uma função f periódica, de período $2L$, seccionalmente C^1 em $[-L, L]$, a sua série de Fourier converge em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ para a média dos limites laterais, ou seja

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

- Se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

- Se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

Definição: Diz-se que uma função Lebesgue mensurável $f : [-L, L] \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ está no espaço $L^p([-L, L])$, para algum $1 \leq p < \infty$, se

$$\int_{-L}^{L} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Nestes espaços, a quantidade

$$\|f\|_p = \left(\int_{-L}^{L} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma, com a qual a distância $d(f, g) = \|f - g\|$ faz de L^p um espaço métrico completo: os espaços de Lebesgue L^p são espaços de Banach.

Os coeficientes de Fourier estão bem definidos desde que $f \in L^1([-L, L])$ porque

$$\int_{-L}^{L} \left| f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| dx \leq \int_{-L}^{L} |f(x)| \, dx < \infty$$

e

$$\int_{-L}^{L} \left| f(x) \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| dx \leq \int_{-L}^{L} |f(x)| \, dx < \infty$$

Teorema (Riesz-Fischer): Dada uma função $f \in L^2([-L, L])$ a sua série de Fourier converge na norma $L^2([-L, L])$, isto é

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) - f(x) \right\|_2 = 0$$

Teorema (Lennart Carleson, 1966): Dada uma função $f \in L^2([-L, L])$, em particular uma função contínua, a sua série de Fourier converge pontualmente quase em toda a parte. Ou seja, exceptuando um conjunto de medida nula de Lebesgue de pontos em $[-L, L]$,

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$